Guía Conceptual de Matemática
Tema: Progresiones.
(Extracto)Montoya

DEFINICION 1: Una sucesión en un conjunto S es una función

$$f: N \to S$$
$$n \to f(n)$$

Si S = R, entonces diremos que f es una sucesión real.

OBSERVACION: Si f es una sucasión y a_n:=f(n), se acostumbra a escribir $\{a_n\}$ para denotar la sucasión f. Al número a_n se le llama n-ésimo término (o término general) de la sucesión. Esta notación nos lleva a pensar en una sucesión no tanto como si fuera función, sino mas bien como si fuera una colección de elementos en un orden definido por los subindices y en lugar de $\{a_n\}$ a veces se escribe

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}, \text{ o bien}$$
$$a_1, a_2, a_3, \ldots \ .$$

No debe confundirse esta notación con la de conjuntos. Así por ejemplo si f es la sucesión en R definida por:

$$a_n = f(n) = \begin{cases} 1 \, si \quad n \quad es \quad par \\ -1 \, si \quad n \quad es \quad impar, \end{cases}$$

entonces $\{a_n\}$={-1, 1, -1, 1,…}≠{-1, 1}

En esta sección estudiaremos las propiedades de ciertas sucesiones reales llamadas progresiones y obtendremos fórmulas para calcular la suma de un número finito cualquiera de términos de dichas progresiones. Además, introduciremos, por primera vez, la noción de suma para un número infinito de sumandos mediante el estudio de la llamada serie geométrica. Esta noción se estudia en detalle, más delante, en el capítulo dedicado a serie en el curso de cálculo.

DEFINICION 2. Se dice que la sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots$, está en progresión aritmética (P. A) si existe un número real d, lla,ado diferencia, tal que

$$a_{n+1} - a_n = d \qquad \forall n \in N$$

TEOREMA 1: Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ está en progresión aritmética, entonces:

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d \qquad \forall n \in N$

(2) $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = n(a_1 + a_n)/2 = n[2a_1 + (n-1)d]/2 \qquad \forall n \in N.$

DEFINICION 3: Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots$, una sucesión de números reales no nulos; se dice que ellos están en progresión geométrica (P.G.), si existe un número real q, llamado razón tal que

$$a_{n+1} / a_n = q \qquad \forall n \in N$$

TEOREMA 2: Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$, están en progresión geométrica, entonces

(1) $a_n = a_1 q^{n-1} \qquad \forall n \in N$

(2) $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1. \qquad \forall n \in N$

Si en una P.G. se tiene que $|q|<1$, es fácil ver que la sucesión de las potencias naturales de q tiende a cero a medida que n crede (para n tendiendo a infinito). Por ejemplo, para q=1/2

$$\{q^n\} = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \ldots, \tfrac{1}{2^n}, \ldots\}.$$

En este caso diremos que el límite de q^n cuando n tiende a infinito es cero y escribiremos:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

(una definición más formal de esta idea de límite de dará en el curso de Cálculo1). Luego, si en una P.G. con $|q|<1$ se tiene que:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1}{1-q} + \frac{q^n}{q-1},$$

entonces podemos definir:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots := \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_1}{1-q} + \frac{q^n}{q-1} \right) = \frac{a_1}{1-q}$$

Tal suma (de infinitos sumandos) se llama serie geométrica y se denota usualmente por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejercicios

Un cuerpo en caida libre recorre, aproximadamente 4.9[m] en el 1º segundo, 14.7 [m] en el 2ºsegundo, 24.5[m]en el 3º segundo y así sucesivamente. ¿Cuántos metros recorre durante el 15ºsegundo?

Solución: Los metros recorridos por el cuerpo en caída libre corresponden a los términos de la P.A.

4.9; 14.7; 24.5; … cuya diferencia es d=9.8

Luego si a_1=4.9 y a_{15} representa la distancia recorrida durante los 15º segundos, entonces:

a_{15}=4.9+14·9.8=142.1[m]

Una bomba de vacío extrae la cuarta parte del aire contenido en in recipiente, en cada bombeada. ¿Qué tanto por ciento de aire, que originalmente contenía el recipiente, queda después de cinco bombeadas?

Solución: Si a_n denota la cantidad de aire que queda en el recipiente tras la n-esima bombeada, entonces se satisface la relación $a_{n+1} = a_n - a_n / 4 = 3a_n / 4$, n ∈ N.

Como ∀n: $a_{n+1} / a_n 3/4$, los números a_n forman una P.G.

Luego: $a_5 = a(3/4)^5$, donde a es la cantidad de aire que inicialmente contenía el recipiente. De aquí resulta que, tras cinco bombeadas, resta el 23.7% de la cantidad original. $(\frac{a_5}{a} \approx 0.237)$.

Una pelota es lanzada desde 1[m] de altura. Si cada vez que rebota elcanza la mitad de la altura que tenía antes de rebotar, calcular la distancia que tecorre antes de detenerse.

Solución: La distancia (en metros), que recorre la pelota antes de detenerse está dada por la suma

S=1+2·1/2+2·1/4+2·1/8+…

$=1+2[1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + ...]$

$=1+2\cdot 1/2\cdot \frac{1}{1-1/2}=3$

(serie geométrica, con q=1/2)